Delta関数相互作用をもつ1次元異種Fermion混合系

下瀬, 育郎; 秋吉, 康光

Delta 関数相互作用をもつ1次元異種Fermion混合系

山口大・文理・物理　下瀬育郎
秋吉康光

（6月1日受理）

§1. まえがき

多数の著者[(1)-(8)]によって，delta-fun tion potential による相互作用をもつ1次元同種fermion 系又は boson 系の問題が厳密に扱われた。とくに，C.N.Yang[(6)]およびB.Sutherland[(7)]は，斥力 potential（$c>0$）をもつN個の同種フェルミオンおよび同種 boson の一般の体系について厳密解をうる方法を確立した。更に，M.Takahashi[(7)]は Yang-Sutherland 理論を拡張して，引力 potential（$c<0$）をもつ同種 fermion 系の一般の場合について厳密解をえた。

本論文では，Yang-Sutherland理論を斥力 delta-function potential（$c>0$）による相互作用をもつ1次元異種 fermion 混合系の場合に拡張する。boson 系の場合は，§3で述べるように異種混合系への拡張がむつかしい。

§2. 1次元異種 fermion混合系

1例として，fermion F_1（質量m_1）のN_1個（spin すべて同じ向き）と fermion F_2（質量m_2）のN_2個（spin 上向きものN_2'個，下向きのものN_2''個）との混合系を考察する*。一般に$m_1 \fallingdotseq m_2$とする。また

$$N_1+N_2=N \quad , \quad N_2'+N_2''=N_2 \quad . \tag{1}$$

（I） Hamltonian

$$\begin{aligned} H = &-\frac{\hbar^2}{2m_1}\sum_{i}^{N_1}\frac{d^2}{dx_i^2}-\frac{\hbar^2}{2m_2}\sum_{j}^{N_2}\frac{d^2}{dx_j^2}+2c_1\sum_{\substack{i<j \\ (i,j\text{ とも }F_1)}}\delta(x_i-x_j) \\ &+2c_2\sum_{\substack{i<j \\ (i,j\text{ とも }F_2)}}\delta(x_i-x_j)+2c_{12}\sum_{\substack{i<j \\ (i,j\text{ のうち1つは }F_1,\text{1つは }F_2)}}\delta(x_i-x_j) \quad , \end{aligned} \tag{2}$$

$(c_1>0,\quad c_2>0,\quad c_{12}>0)$.

波動関数ψは，Yang[(6)]等にならい，Bethe仮説を用いて

$$\psi=\sum_{P}\,[Q,P]\,\exp\ i\,[p_{P1}x_{Q1}+\cdots+p_{PN}x_{QN}] \tag{3}$$

---

* 本論文の諸記号の意義の詳細についてはYang[(6)]および Sutherland[(7)]の論文を参照して頂きたい。

とおく。こゝに,

$p_{P1}, \cdots, p_{PN}$: unequal number の set,

$0 < x_{Q1} < x_{Q2} < \cdots < x_{QN} < L$,

$P = [P1, \cdots, PN]$, $Q = [Q1, \cdots, QN]$: integer

$1, \cdots, N$ の2組の permutation.

(Ⅱ) dalta-function potentialは次の境界条件でおきかえられる。

$$\frac{\hbar^2}{2}\Big[\Big(\frac{1}{m^{(i)}}\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{1}{m^{(j)}}\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)\psi_{x_i = x_j+} - \Big(\frac{1}{m^{(i)}}\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{1}{m^{(j)}}\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)\psi_{x_i = x_j-}\Big] = 2c\psi_{x_i = x_j}. \tag{4}$$

(4) および $x_i = x_j$ におけるψの連続条件から

(ⅰ) i, j とも F_1 の場合; $m^{(i)} = m^{(j)} = m_1$, $c = c_1$,

$$x_{ij} = \frac{i c_1^*}{p_i - p_j}, \quad c_1^* = \frac{2m_1}{\hbar^2} c_1, \tag{5}$$

(ⅱ) i, j とも F_2 の場合; $m^{(i)} = m^{(j)} = m_2$, $c = c_2$,

$$x_{ij} = \frac{i c_2^*}{p_i - p_j}, \quad c_2^* = \frac{2m_2}{\hbar^2} c_2, \tag{5'}$$

(ⅲ) i, j のうち1つは F_1, 1つは F_2 の場合; $m^{(i)} = m_1$, $m^{(j)} = m_2$ 又は $m^{(i)} = m_2$, $m^{(j)} = m_1$, $c = c_{12}$ $(= c_{21})$,

$$x_{ij} = \frac{i c_{12}^*}{p_i - p_j}, \quad c_{12}^* = \frac{2}{\hbar^2} \cdot \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} c_{12}. \tag{5''}$$

(Ⅲ) 周期的境界条件から

$$\lambda_i(p\,;\,c\,;\,R_\psi)\,\xi_0 = X_{(j+1)j}X_{(j+2)j}\cdots X_{Nj} \times X_{1j}X_{2j}\cdots X_{(j-1)j}\,\xi_0, \quad j = 1, \cdots, N \tag{6}$$

$$\lambda_i(p\ ;\ c\ ;\ R_\psi) = \exp(i\,p_j L)\ , \tag{7}$$

$$X_{ij} = \frac{1 - x_{ij}P_{ij}}{1 + x_{ij}}\ , \tag{8}$$

ここに

P_{ij} : Qi と Qj とを交換する operetor,

X_{ij} : (Qi , Pi) と (Qi , Pj) とを交換する operetor ,

ξ_0 : (3)における matrix [Q, P]の column,

R_ψ: N個の座標 x_i の permutation group S_N の irreducible representation.

(Ⅳ)

$$\mu_j(p\,;c\,;R_\phi)\,\phi = X'_{(j+1)j}X'_{(j+2)j}\cdots X'_{Nj}$$
$$\times X'_{1j}\cdots X'_{(j-1)j}\phi\ ,\quad j = 1,\cdots,N \tag{9}$$

$$X'_{ij} = \frac{1 + x_{ij}P'_{ij}}{1 + x_{ij}}\ , \tag{10}$$

$$P'_{ij} = -P_{ij}\ , \tag{11}$$

R_ϕ : R_ψの conjugate representation $\widetilde{R}_\psi$.

i , j が同種 fermion で同じ向き spin のものについては $P'_{ij} = 1$, $X'_{ij} = 1$.

$$\mu_j(p\,;c\,;R_\phi) = \lambda_j(p\,;c\,;R_\psi) = \exp(i\,p_j L)\ . \tag{12}$$

ϕ はBethe-Yang 仮説[7] を用いて

$$\phi = \sum_P [Q, P]\,F(\Lambda_{P1},\ y_{Q1})\cdots F(\Lambda_{PN_2},\ y_{QN_2})\ , \tag{13}$$

$$F(\Lambda, y) = \prod_{j=1}^{y-1}\frac{i\,p_j - i\Lambda - c_{12}^{*\prime}}{i\,p_{j+1} - i\Lambda + c_{12}^{*\prime}}\ ,\quad c_{12}^{*\prime} = \frac{1}{2}c_{12}^{*}\ . \tag{14}$$

(Ⅴ)

$$\nu_\alpha(\Lambda\ ;\ -c_2\ ;\ R_\phi)\,\zeta_0^{(1)} = X''_{(\alpha+1)\alpha}X''_{(\alpha+2)\alpha}\cdots X''_{N\alpha}$$

$$\times X''_{1\alpha} \cdots X''_{(\alpha-1)\alpha}\, \zeta_0^{(1)} \quad , \quad \alpha = 1, \cdots, N_2 \tag{15}$$

$$X''_{\alpha\beta} = \frac{1 + x_{\alpha\beta} P'_{\alpha\beta}}{1 - x_{\alpha\beta}} = \frac{1 + x_{\alpha\beta}}{1 - x_{\alpha\beta}} \cdot X'_{\alpha\beta} , \tag{16}$$

$$x_{\alpha\beta} = \frac{i c_2^*}{\Lambda_\alpha - \Lambda_\beta} \quad , \tag{17}$$

$\zeta_0^{(1)}$: (13) における matrix [Q, P] の column.

(13), (14) を用いて (15) から

$$\nu_\alpha = \prod_{j=1}^{N} \frac{i\Lambda_\alpha - i p_j + c_{12}^{*\prime}}{i\Lambda_\alpha - i p_j - c_{12}^{*\prime}} , \tag{18}$$

(16), (17) を用いて (15) から

$$\nu_\alpha = - \nu'_\alpha \cdot \prod_{\beta=1}^{N_2} \frac{i\Lambda_\alpha - i\Lambda_\beta + c_2^*}{i\Lambda_\alpha - i\Lambda_\beta - c_2^*} \quad , \tag{19}$$

ここに

$$\nu_\alpha{}' (\Lambda ; c_2 ; R_{\zeta_0^{(1)}})\, \zeta_0^{(1)} = X'_{(\alpha+1)\alpha} X'_{(\alpha+2)\alpha} \cdots X'_{N\alpha}$$

$$\times X'_{1\alpha} \cdots X'_{(\alpha-1)\alpha}\, \zeta_0^{(1)} . \qquad \alpha = 1, \cdots, N'_2 \tag{20}$$

(VI) 再び，Bethe-Yang 仮説[7]を用いて

$$\zeta_0^{(1)} = \sum_P [Q, P]\, G(k_{P1}, z_{Q1}) \cdots G(k_{PN''_2}, z_{QN''_2}) , \tag{21}$$

$$G(k, z) = \prod_{\alpha=1}^{z-1} \frac{i\Lambda_\alpha - ik - c_2^{*\prime}}{i\Lambda_{\alpha+1} - ik + c_2^{*\prime}} \quad ; \qquad c_2^{*\prime} = \frac{1}{2} c_2^{*\prime} . \tag{22}$$

(21), (22) を用いると (20) から

$$\nu'_\alpha = \prod_{b=1}^{N''_2} \frac{i\Lambda_\alpha - ik_b - c_2^{*\prime}}{i\Lambda_\alpha - ik_b + c_2^{*\prime}} . \tag{23}$$

(Ⅶ)

$$\nu_a(k;-c_2;R_{\zeta_0^{(1)}})\,\zeta_0^{(2)} = X'''_{(a+1)a}\,X'''_{(a+2)a}\cdots X'''_{N_2''a}$$

$$\times X'''_{1a}\cdots X'''_{(a-1)a}\,\zeta_0^{(2)}, \quad a=1,\cdots,N_2'' \tag{24}$$

$$X'''_{ab} = \frac{1+x_{ab}P'_{ab}}{1-x_{ab}} = \frac{1+x_{ab}}{1-x_{ab}}\cdot X'_{ab}, \tag{25}$$

$$x_{ab} = \frac{ic_2^*}{k_a-k_b}, \tag{17'}$$

$$X'_{ab} = \frac{1+x_{ab}P'_{ab}}{1+x_{ab}} = 1, \tag{26}$$

$\zeta_0^{(2)}$: (21)における matrix 〔Q, P〕 の column.

(21), (22) を用いて (24) から

$$\nu_a = \prod_{\beta=1}^{N_2} \frac{ik_a - i\Lambda_\beta + c_2^{*\prime}}{ik_a - i\Lambda_\beta - c_2^{*\prime}}, \tag{27}$$

(25), (17'), (26) を用いて (24) から

$$\nu_a = -\prod_{b=1}^{N_2''} \frac{ik_a - ik_b + c_2^*}{ik_a - ik_b - c_2^*}. \tag{28}$$

(Ⅷ) (9), (13), (14), (12) から

$$\exp(ip_jL) = \prod_{\beta=1}^{N_2} \frac{ip_j - i\Lambda_\beta - c_{12}^{*\prime}}{ip_j - i\Lambda_\beta + c_{12}^{*\prime}}, \quad j=1,\cdots,N \tag{29}$$

(18), (19), (23) から

$$\prod_{j=1}^{N} \frac{i\Lambda_\alpha - ip_j + c_{12}^{*\prime}}{i\Lambda_\alpha - ip_j - c_{12}^{*\prime}} = -\prod_{\beta=1}^{N_2} \frac{i\Lambda_\alpha - i\Lambda_\beta + c_2^{*\prime}}{i\Lambda_\alpha - i\Lambda_\beta - c_2^{*\prime}}$$

$$\times \prod_{b=1}^{N_2''} \frac{i\Lambda_\alpha - ik_b - c_2^{*\prime}}{i\Lambda_\alpha - ik_b + c_2^{*\prime}}, \quad \alpha=1,\cdots,N_2 \tag{30}$$

(27), (28) から

$$\prod_{\beta=1}^{N_2} \frac{ik_a - i\Lambda_\beta + c_2^{*\prime}}{ik_a - i\Lambda_\beta - c_2^{*\prime}} = - \prod_{b=1}^{N_2''} \frac{ik_a - ik_b + c_2^*}{ik_a - ik_b - c_2^*} \, . \quad a = 1, \cdots, N_2'' \qquad (31)$$

(Ⅸ) (29), (30), (31)の対数をとると

$$L_p = 2\pi I_p + \sum_{\Lambda} \theta_{12}(2p - 2\Lambda) \, , \qquad (29')$$

$$\sum_{\Lambda'} \theta_2(\Lambda - \Lambda') = 2\pi J_\Lambda + \sum_{p} \theta_{12}(2\Lambda - 2p) + \sum_{k} \theta_2(2\Lambda - 2k), \qquad (30')$$

$$\sum_{k'} \theta_2(k - k') = 2\pi K_k + \sum_{\Lambda} \theta_2(2k - 2\Lambda) \, , \qquad (31')$$

ここに $\theta_{12}(x) = -2\tan^{-1}\dfrac{x}{c_{12}^*}$,

$$\theta_2(x) = -2\tan^{-1}\frac{x}{c_2^*} \, ,$$

I_p, I_Λ, K_k : interger 又は half interger.

ground state に対しては，例えばN_1, N_2', N_2'' が何れも odd ($N_2 =$ even, $N =$ odd) の場合には

I_p : $-\dfrac{1}{2}(N-1)$ から $\dfrac{1}{2}(N-1)$ までの間のN個の integer,

J_Λ : $-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{N_2}{2} - \dfrac{1}{2}\right)$ から $\dfrac{N_2}{2} - \dfrac{1}{2}$ までの間のN_2個の half integer,

K_k : $-\dfrac{1}{2}(N_2'' - 1)$ から $\dfrac{1}{2}(N_2'' - 1)$ までの間のN_2''個の integer.

(Ⅹ) N, N_2, $N_2'' \longrightarrow \infty$ (上記の比例関係を保って)

$$p = 2\pi f + \int_{-B}^{B} \theta_{12}(2p - 2\Lambda)\,\sigma(\Lambda)\,d\Lambda \, , \qquad (29'')$$

$$\int_{-B}^{B} \theta_2(\Lambda - \Lambda')\,\sigma(\Lambda')\,d\Lambda' = 2\pi g + \int_{-Q}^{Q} \theta_{12}(2\Lambda - 2p)\,\rho(p)\,dp + \int_{-R}^{R} \theta_2(2\Lambda - 2k)\,\tau(k)\,dk \, , \qquad (30'')$$

$$\int_{-R}^{R} \theta_2(k - k')\,\tau(k')\,dk' = 2\pi \ell + \int_{-B}^{B} \theta_2(2k - 2\Lambda)\,\sigma(\Lambda)\,d\Lambda \, , \qquad (31'')$$

$$\frac{df}{dp} = \rho, \quad \frac{dg}{d\Lambda} = \sigma, \quad \frac{d\ell}{dk} = \tau.$$

(XI)　(29″)，(30″)，(31″) をそれぞれ p, Λ, k で微分して

$$2\pi\rho = 1 + \int_{-B}^{B} \frac{4c_{12}^{*}\,\sigma\, d\Lambda}{c_{12}^{*2} + 4(p-\Lambda)^2}\ , \tag{29‴}$$

$$\int_{-Q}^{Q} \frac{4c_2^{*}\,\rho\, dp}{c_{12}^{*2} + 4(\Lambda - p)^2} + \int_{-R}^{R} \frac{4c_2^{*2}\,\tau\, dk}{c_2^{*2} + 4(\Lambda - k)^2}$$

$$= 2\pi\sigma + \int_{-B}^{B} \frac{2c_2^{*}\,\sigma\, d\Lambda'}{c_2^{*2} + (\Lambda - \Lambda')^2}\ , \tag{30‴}$$

$$\int_{-B}^{B} \frac{4c_2^{*}\,\sigma\, d\Lambda}{c_2^{*2} + 4(k-\Lambda)^2} = 2\pi\tau + \int_{-R}^{R} \frac{2c_2^{*}\,\tau\, dk'}{c_2^{*2} + (k-k')^2}\ , \tag{31‴}$$

$$\frac{N}{L} = \int_{-Q}^{Q} \rho\, dp,\quad \frac{N_2}{L} = \int_{-B}^{B} \sigma\, d\Lambda,\quad \frac{N_2''}{L} = \int_{-R}^{R} \tau\, dk. \tag{32}$$

ground state energy E は

$$\frac{E}{L} = \frac{\hbar^2}{2}\cdot\frac{1}{N}\left(\frac{N_1}{m_1} + \frac{N_2}{m_2}\right)\int_{-Q}^{Q} p^2 \rho\, dp. \tag{33}$$

(XII)　(29‴)，(30‴)，(31‴)，(32)，(33) の結果は，$m_1 = m_2 = m$，$N_2 = M$，$N_2'' = M_1$，$c_1 = c_2 = c_{12} = c$　($= c_1^{*} = c_2^{*} = c_{12}^{*}$) とおけば Sutherland[7] の結果 ($\kappa = 3$) と完全に一致する。

(XIII)　上例の場合を，fermion が3種以上の場合，各種について spin の向きが2つ以上の場合の一般の混合系に拡張することは容易にできる。

§3.　1次元 boson 系

同種 boson 系についての Yang-Sutherland 理論から

$$\exp(i\, p_j L) = \lambda_j\,(p\ ;\ c\ ;\ R\psi)$$

$$= \prod_{i \neq j} \frac{1 - x_{ij}}{1 + x_{ij}} \cdot \mu_j\,(p\ ;\ -c\ ;\ R\phi), \tag{34}$$

$$X_{ij} = \frac{1 - x_{ij}P_{ij}}{1 + x_{ij}}\ ,\qquad X_{ij}' = \frac{1 - x_{ij}P_{ij}}{1 - x_{ij}}\ . \tag{35}$$

(34) 右辺の factor $\prod_{i \neq j} \frac{1 - x_{ij}}{1 + x_{ij}}$ のため, boson 系では異種混合系に拡張することはむつかしい。

文　　献

1) E.H.Lieb and W.Liniger, Phys. Rev. 130 (1963) 1605.
   E.H.Lieb, Phys. Rev. 130 (1963) 1616.
2) J.B.Mc'Guire, J.Math. Phys. 5 (1964) 622.
3) J.B.Mc'Guire, J.Math. Phys. 6 (1965) 432 ; 7 (1966) 123.
4) M.Flicker and E.H.Lieb, Phys. Rev. 161 (1967) 179.
5) M.Gaudin, Phys. Letters 19 (1967) 55.
6) C.N.Yang, Phys. Rev. Letters 19 (1967) 1312.
7) B.Sutherland, Phys. Rev. Lettes 20 (1968) 98.
8) M.Takahashi, Prog. Theor. Phys. 44 (1970) 899.